02 1992

7 5 7

ТУ–19–241–82

8

3


студия
ДИАФИЛЬМ

07—3—511

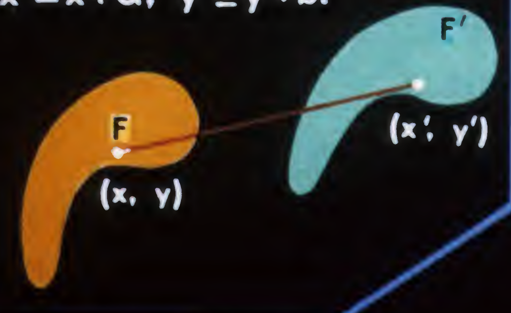
ВЕКТОРЫ

Диафильм по геометрии
для 8-го класса

Преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка (x, y) переходит в точку (x + a, y + b), a и b постоянные, называется *параллельным переносом*.

Параллельный перенос задается формулами:

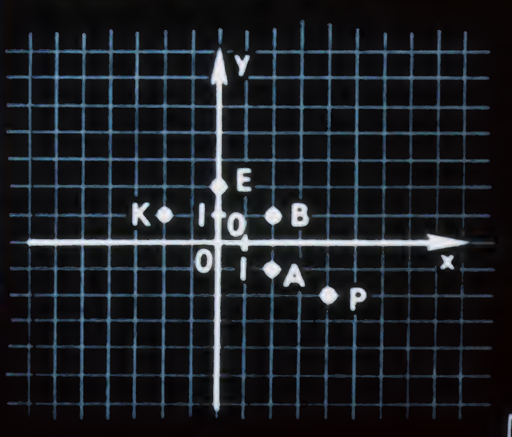
$x' = x + a$, $y' = y + b$.

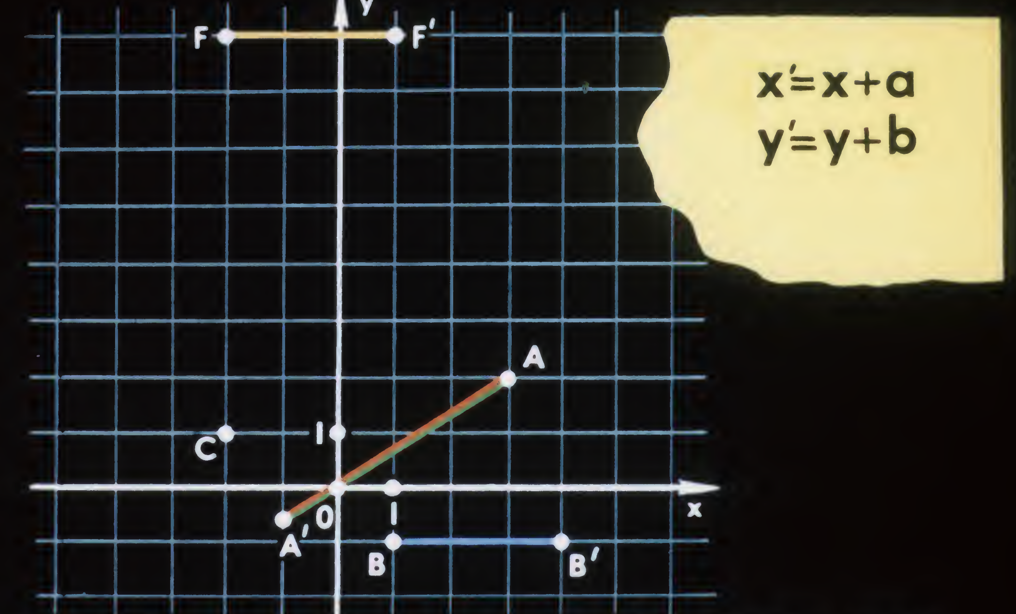


Параллельный перенос задан формулами:

$x' = x' - 2$, $y' = y + 1$.

В какие точки переходят точки A, B, O? Какие точки переходят в точки A, B, O?





Задайте формулами параллельный перенос, переводящий:

а) точку A в точку A′; б) точку B в точку B′;
в) точку C в точку C; г) точку A′ в точку A;
д) точку F в точку F′.

Докажите, что *параллельный перенос есть движение.*

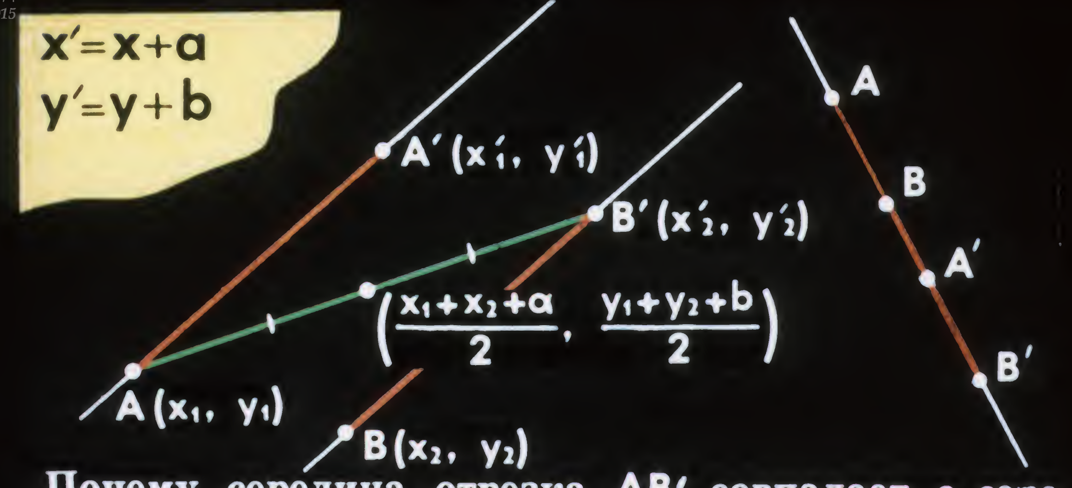
$A(x_1, y_1)$ переходит в $A'(x_1+a, y_1+b)$.

$B(x_2, y_2)$ переходит в $B'(x_2+a, y_2+b)$.

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

$$A'B'^2=?$$

Существует ли параллельный перенос, переводящий точку (0, 1) в точку (1, 0), а точку (0, 2) — в точку (3, 0)? Ответ объясните.

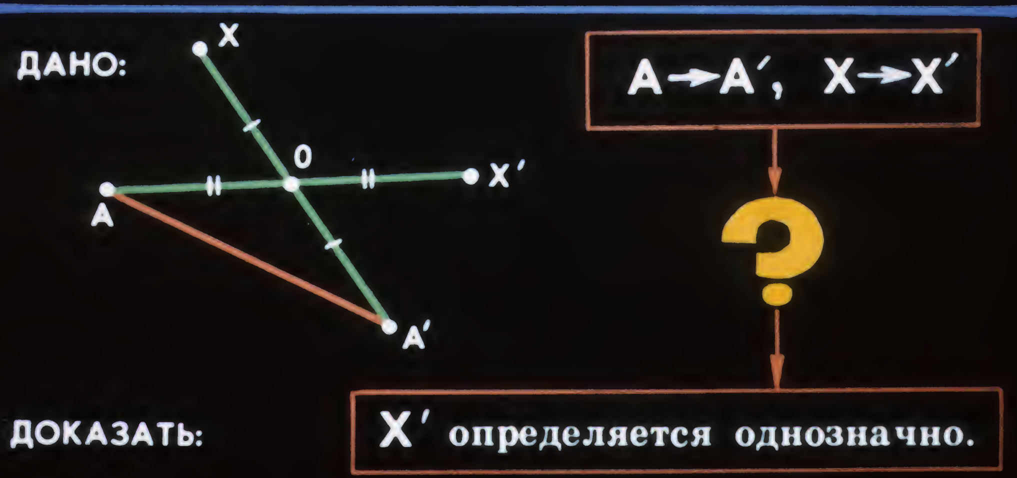


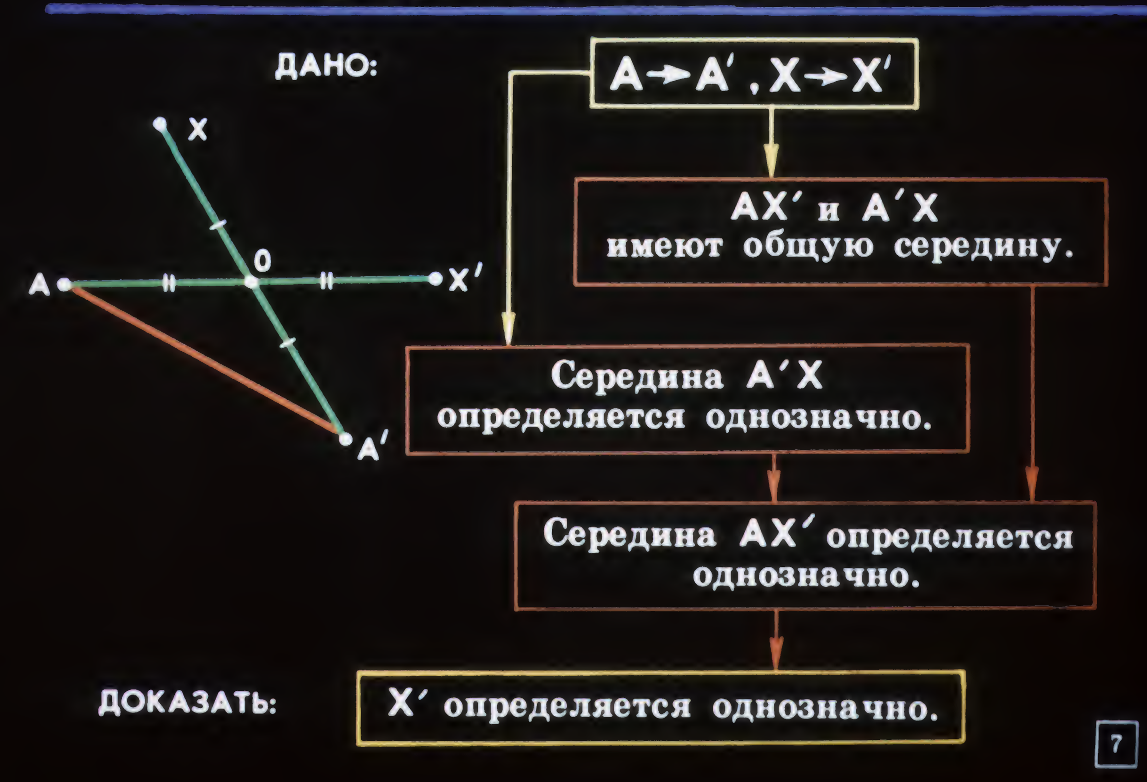
Почему середина отрезка AB′ совпадает с серединой отрезка A′B? Используя этот факт, докажите, что:

а) при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние;

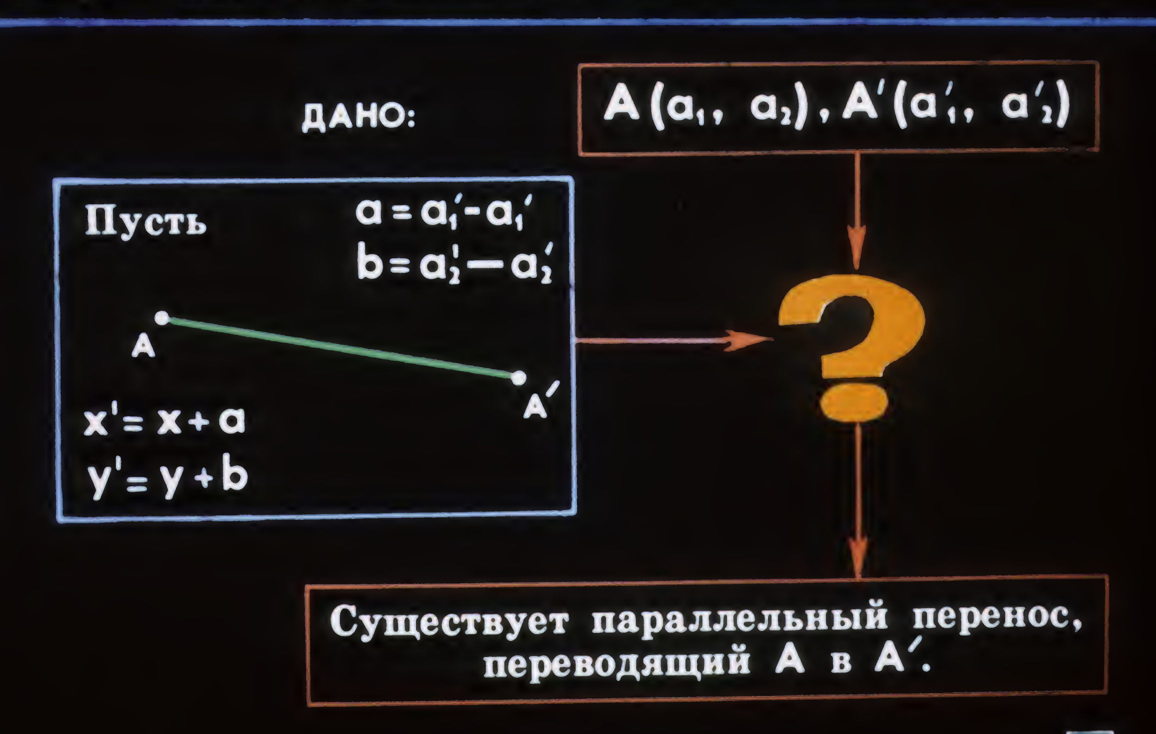
б) при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

Теорема. Каковы бы ни были две точки A и A′, существует, и притом единственный, параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A′.
Используя чертеж, проведите доказательство *единственности*.

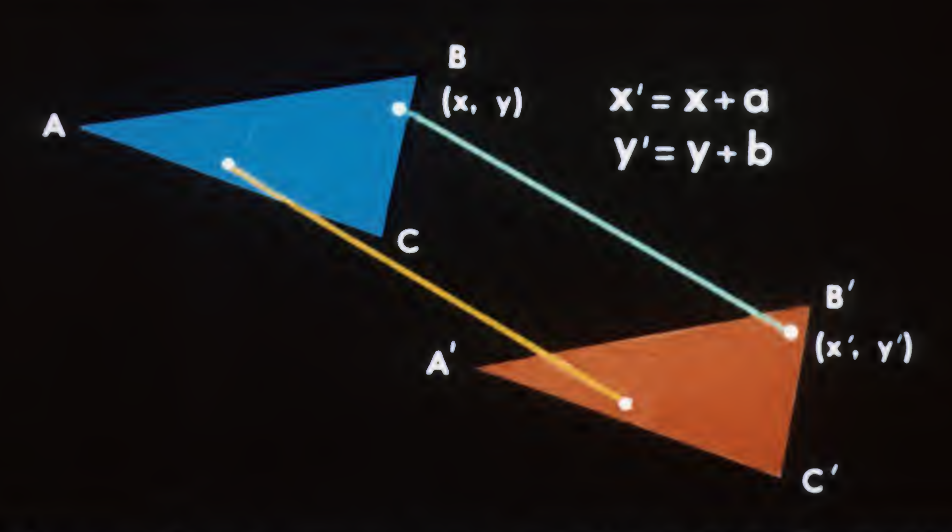



Проверьте свое доказательство.
ДАНО:
A→A′, X→X′
X
O
A
X′
A′
AX′ и A′X
имеют общую середину.
Середина A′X
определяется однозначно.
Середина AX′ определяется
однозначно.
ДОКАЗАТЬ:
X′ определяется однозначно.

Проведите доказательство *существования*.



Теорема. Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос. Два параллельных переноса, выполненные один за другим, дают параллельный перенос.



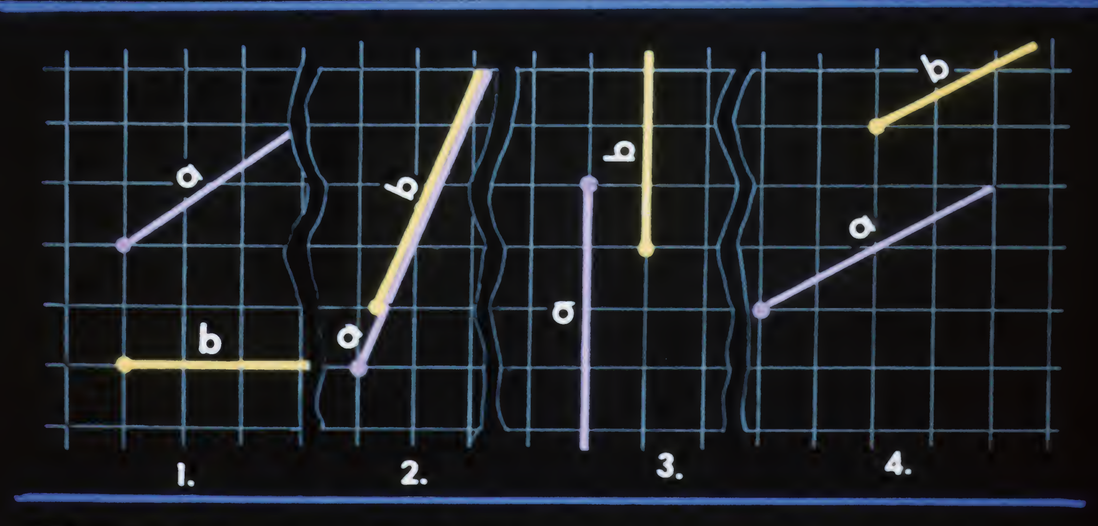
Какие формулы задают параллельный перенос, обратный данному?


B
x′= x+ a
y′= y +b
B′
A
(x, y)
(x′, y′)
A′
C
C′
x″=x′+ c
y″=y′+ d
B″
A″
(x″, y″)
C″
Какие формулы задают параллельный перенос, получающийся в результате последовательного выполнения данных параллельных переносов?

Направленный отрезок — *вектор*.

$\overline{AB}$, $\bar{a}$ – обозначения вектора.

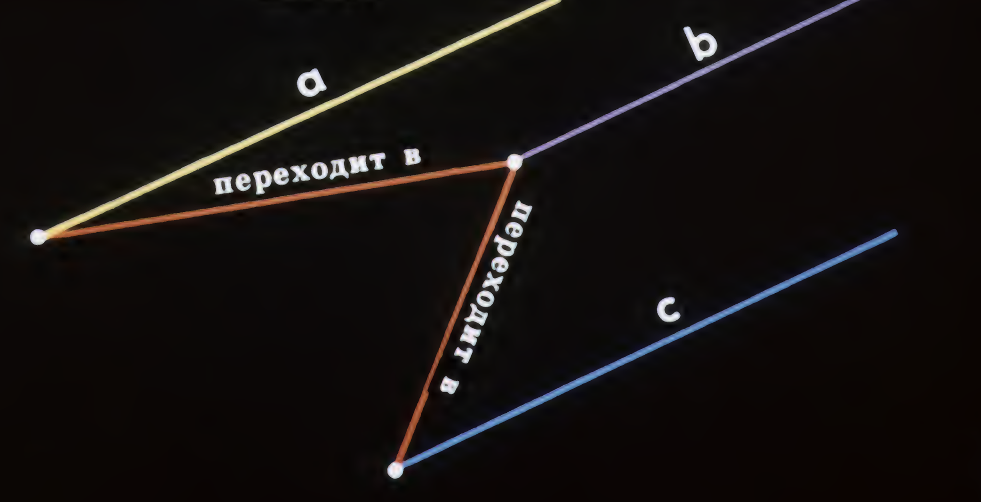
Две полупрямые называются *одинаково направленными*, если их можно совместить параллельным переносом.



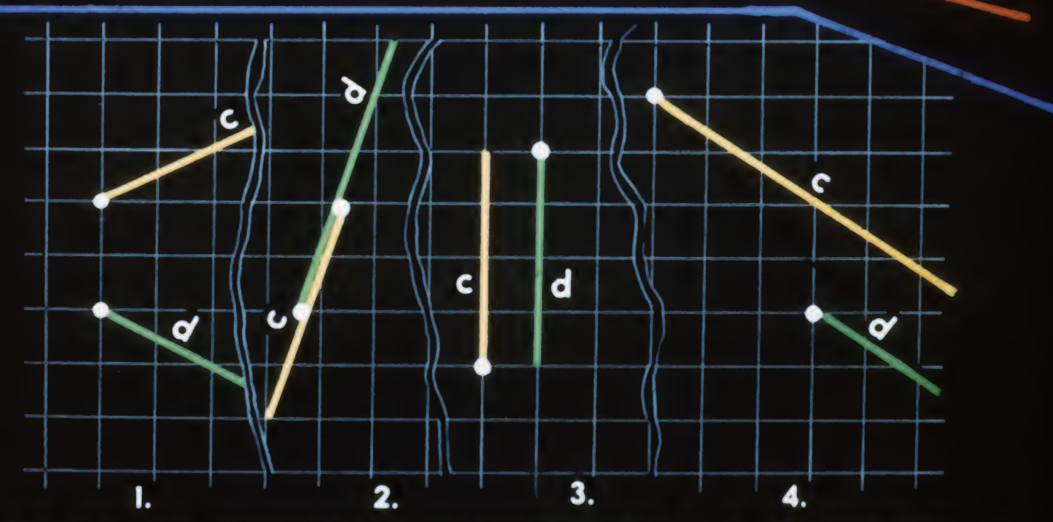
На каких чертежах полупрямые одинаково направлены? Каким параллельным переносом их можно совместить?

Используя определение одинаково направленных полупрямых, докажите, что

если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c одинаково направлены.



a и b_1 одинаково направлены,
b и a_1 одинаково направлены.
Тогда a и b называются *противоположно направленными*.



На каких чертежах полупрямые c и d противоположно направлены? Ответ объясните.

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **одинаково направленными**, если одинаково направлены полупрямые AB и CD. Длина отрезка, изображающего вектор, называется **абсолютной величиной** (**модулем**) вектора: $|\overline{a}|$.



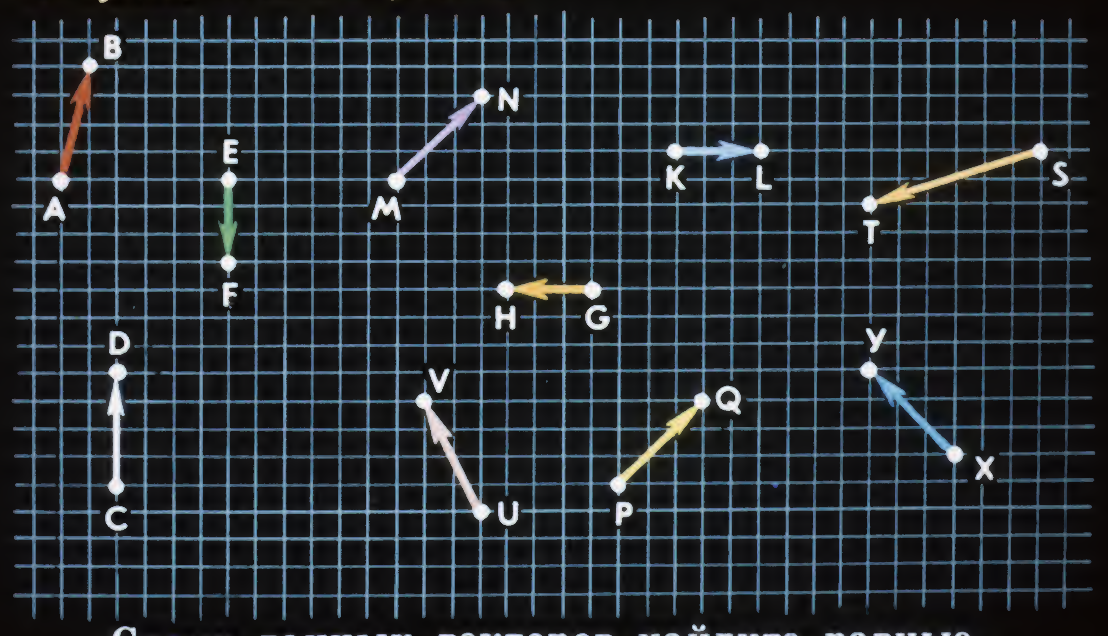
Среди данных векторов найдите а) одинаково направленные; б) равные по модулю.

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом.

Докажите, что равные векторы одинаково направлены и равны по модулю.

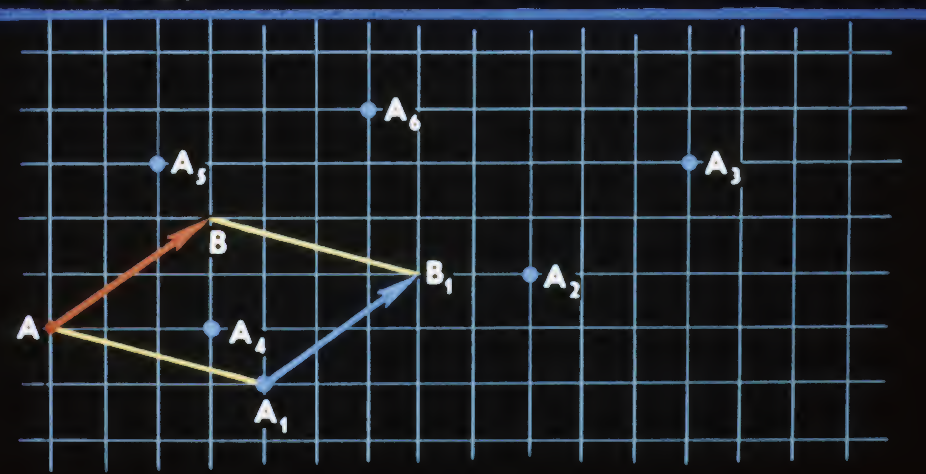


Если векторы одинаково направлены и равны по модулю, то они равны.



Среди данных векторов найдите равные.

$\bar{0}$ – *нулевой вектор*
(начало совпадает с концом).
$|\bar{0}| = 0$.



Докажите, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и только один.



Числа $a_1 = x_2 - x_1$ и $a_2 = y_2 - y_1$ называются *координатами вектора* $\bar{a}$:

$$\bar{a}\,(a_1,\ a_2).$$

$\bar{a}$

$A_2(x_2,\ y_2)$

$A_1(x_1,\ y_1)$

y

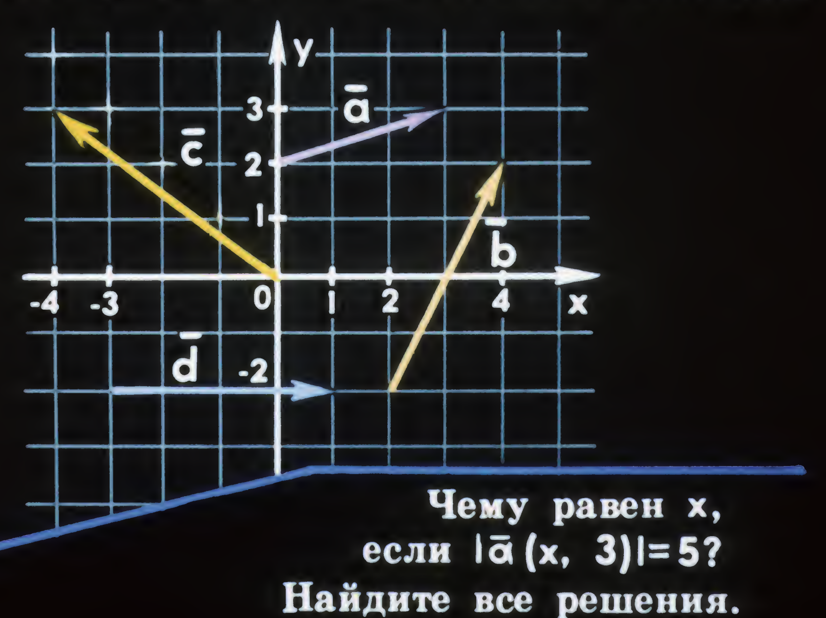
3
2
1
0
-2

-4 -3 1 2 4 x

$\bar{a}$ $\bar{b}$ $\bar{c}$ $\bar{d}$

Определите координаты данных векторов.

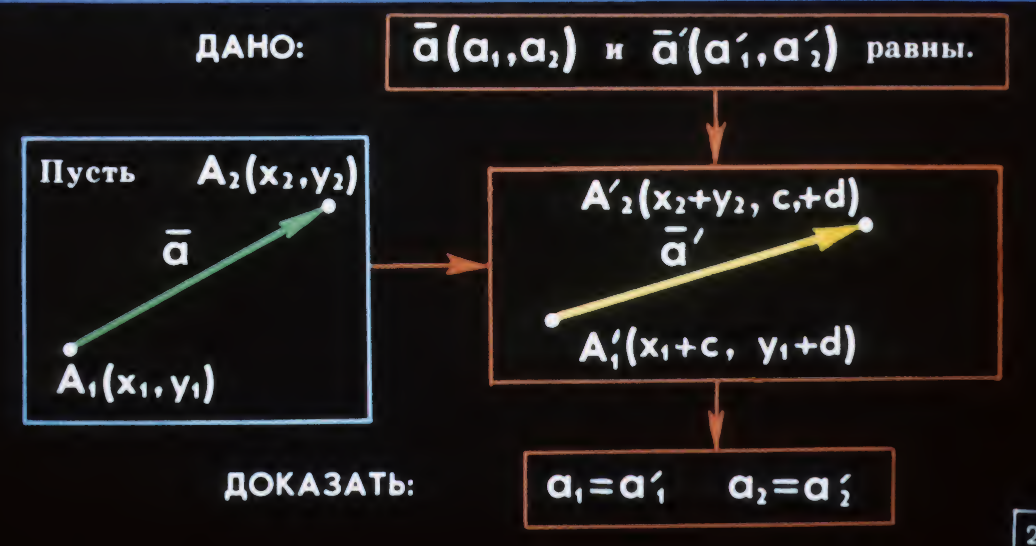
Объясните, почему $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
Найдите модуль каждого из данных векторов.



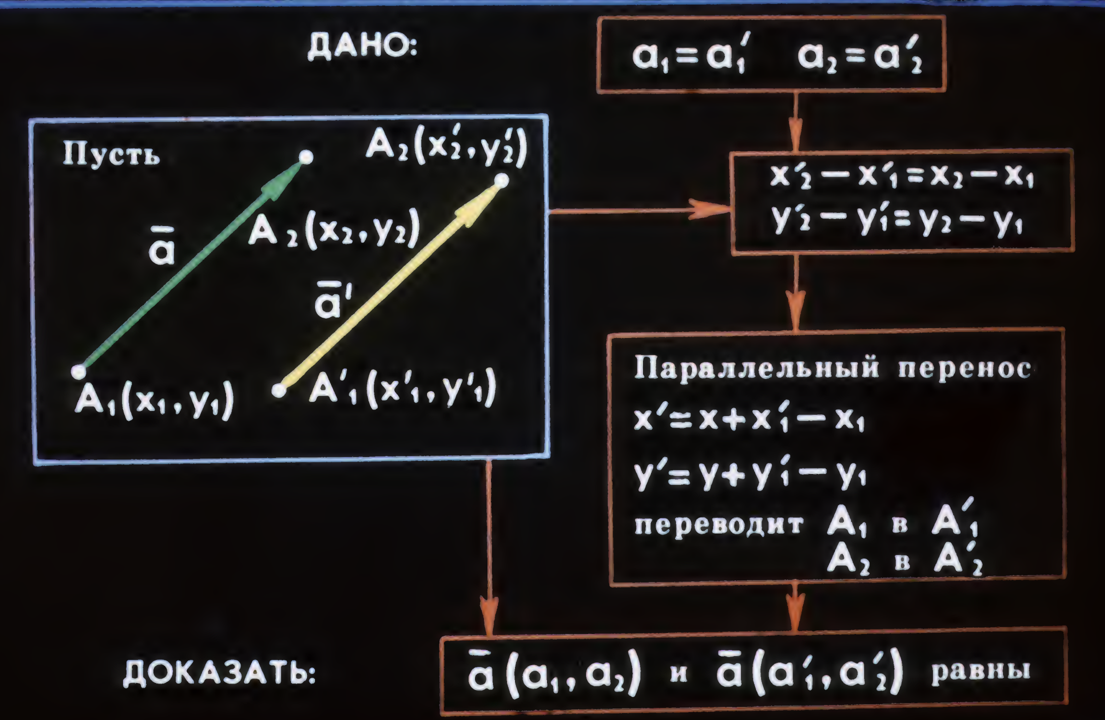
Чему равен x,
если $|\bar{a}(x, 3)| = 5$?
Найдите все решения.

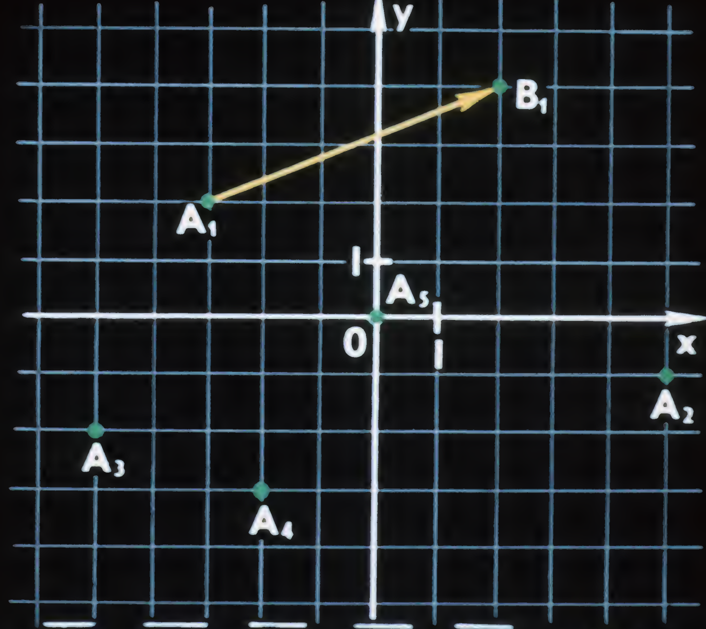
Теорема. Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. И обратно, если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

Объясните доказательство первого утверждения теоремы.



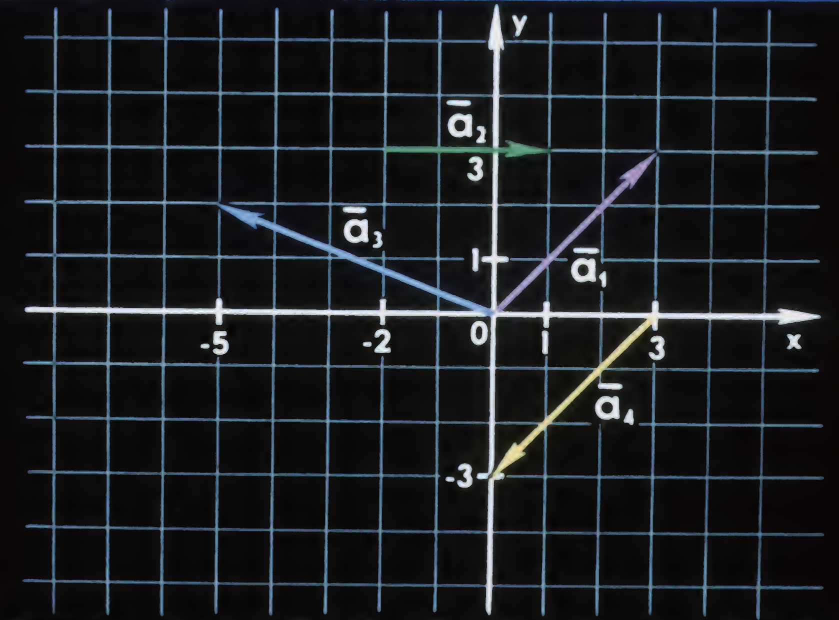
Объясните доказательство обратного утверждения.





Векторы $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, $\overline{A_4B_4}$, $\overline{A_5B_5}$ равны. Найдите координаты точек B_2, B_3, B_4 и B_5.

Вектор $\bar{c}(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ называется *суммой векторов* $\bar{a}(a_1,\ a_2)$ и $\bar{b}(b_1,\ b_2)$.



Найдите суммы: $\bar{a}_1+\bar{a}_2$; $\bar{a}_1+\bar{a}_3$; $\bar{a}_1+\bar{a}_4$; $\bar{a}_1+\bar{a}_3+\bar{a}_4$.

$$\bar{c}\,(a_1+b_1,\ a_2+b_2)=\bar{a}\,(a_1,\ a_2)+\bar{b}\,(b_1,\ b_2)$$

Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$.

$\bar{a}\,(3,2)$

A_2

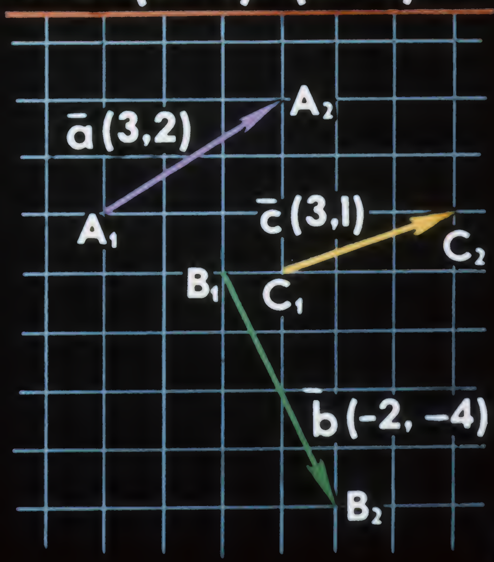
A_1

B_1

$\bar{b}\,(-2,\ -4)$

B_2

2. $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

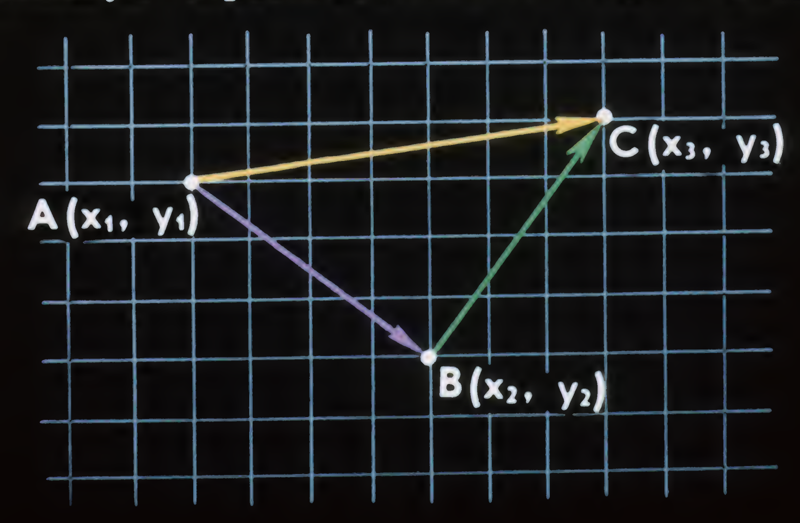


$\bar{c}(a_1+b_1, a_2+b_2)=\bar{a}(a_1, a_2)+\bar{b}(b_1, b_2)$

Теорема.

Для любых точек A, B, C
$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

Используя чертеж, докажите эту теорему.



Объясните следующий способ построения суммы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

A_2

$\bar{a}$

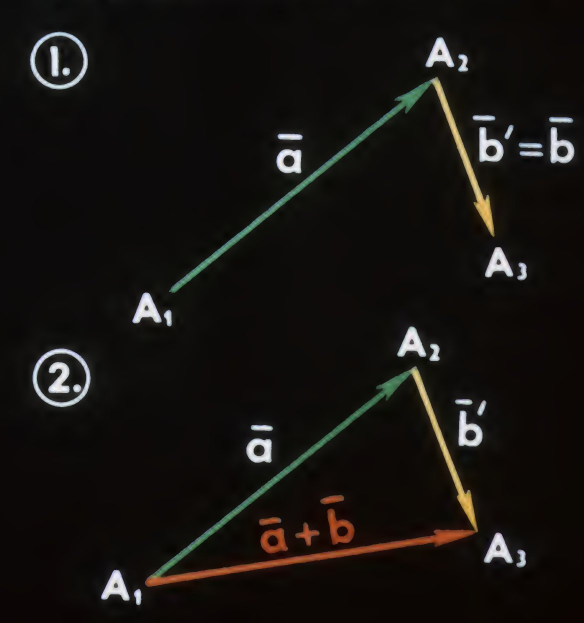
B_1

$\bar{b}$

A_1

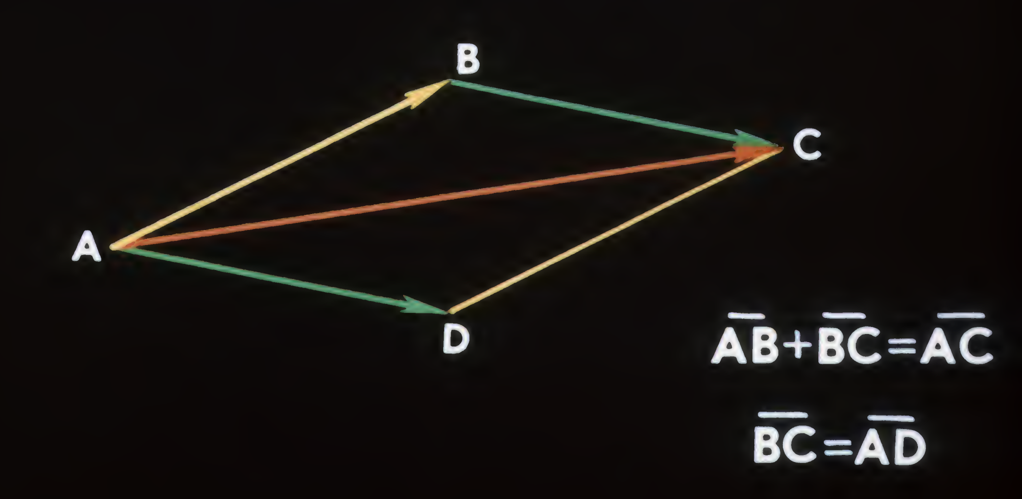
B_2

„Правило треугольника"



Доказите *„правило параллелограмма“:* если ABCD — параллелограмм, то

$$\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}.$$

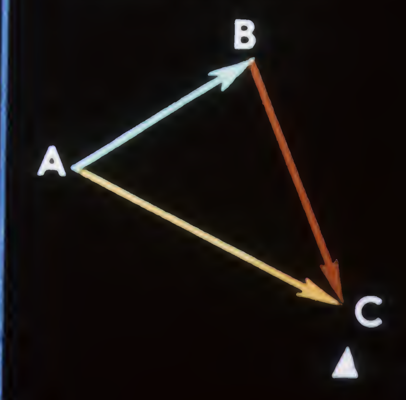


Если $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$, то вектор $\bar{c}$ называется *разностью* $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$. Как найти координаты разности векторов?

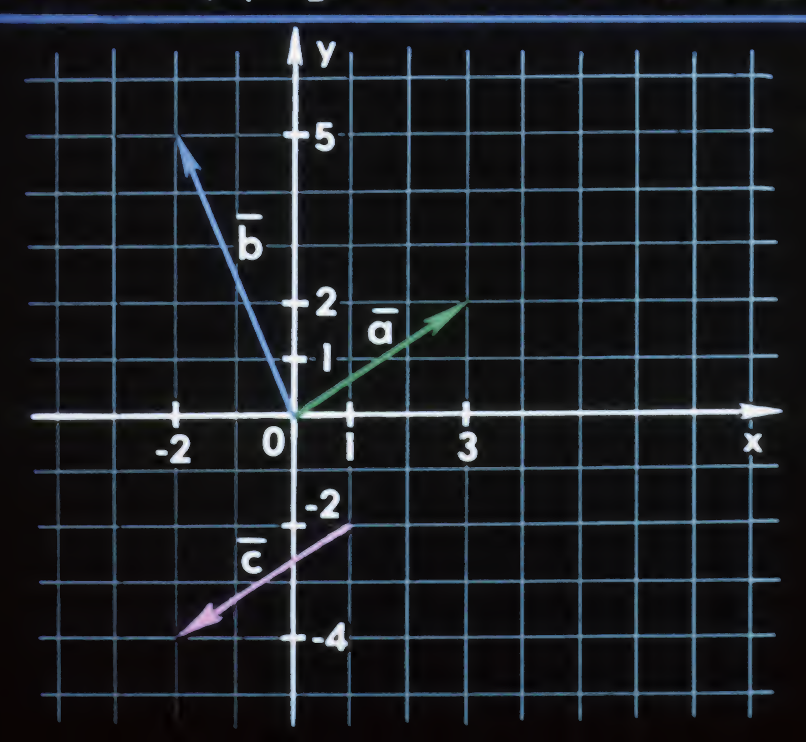
Для каждой пары векторов найдите разность.

Докажите, что для любых точек A, B и C,

$$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}.$$



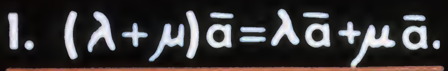
Вектор $(\overline{\lambda a_1, \lambda a_2})$ называется *произведением вектора* $(\overline{a_1, a_2})$ *на число* λ: $\lambda(\overline{a_1, a_2}) = (\overline{\lambda a_1, \lambda a_2})$.

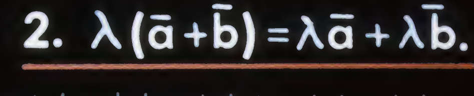


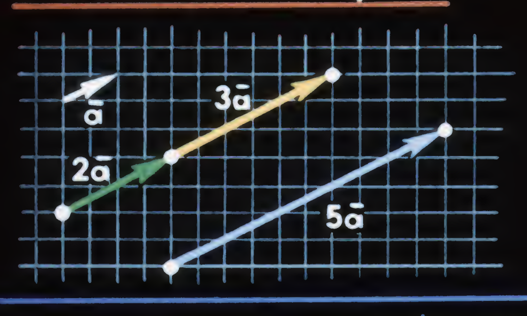
Найдите векторы:

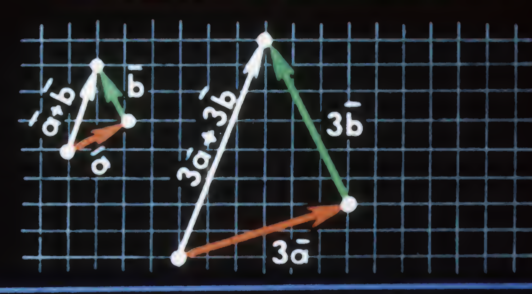
$3\bar{a}$;
$-2\bar{b}$;
$7\bar{c}$;
$4\bar{a} + 4\bar{b}$;
$2\bar{a} + 3\bar{a}$;
$5\bar{a} + 5\bar{c}$.

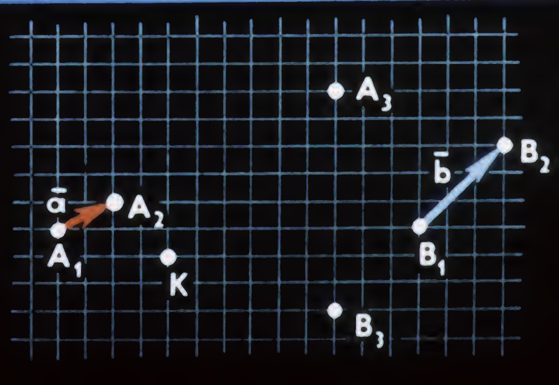
Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и чисел λ и μ:











Как построить вектор $5\bar{a}-2\bar{b}$?

Теорема.

1. $|\lambda \bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$.

2. Направление $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a} \neq \bar{0}$ совпадает с направлением $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению $\bar{a}$, если $\lambda < 0$.

Объясните *доказательство первого утверждения* теоремы.

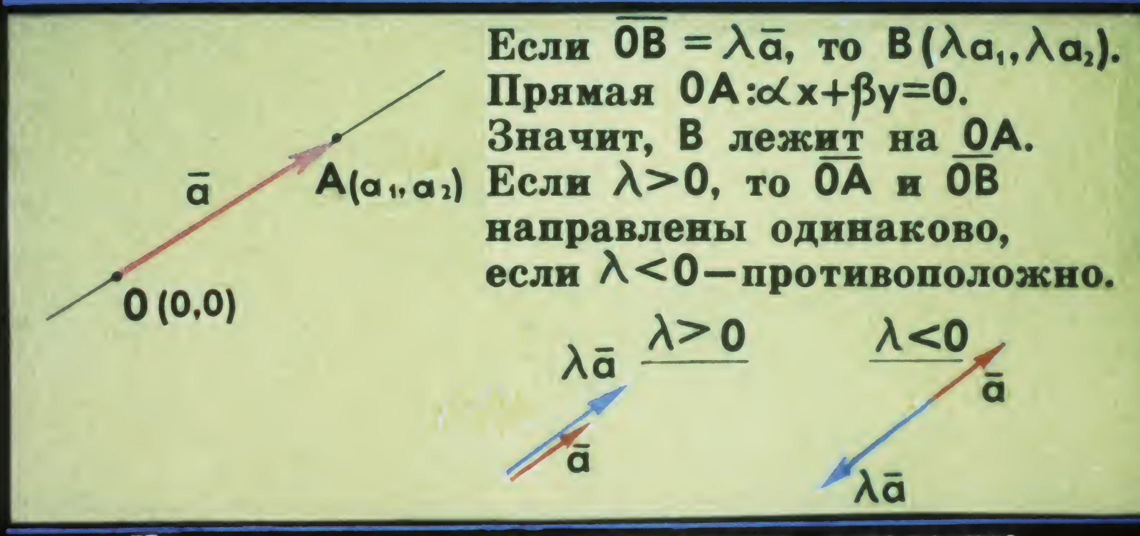
Если $\bar{a}(a_1, a_2)$ и $\bar{b} = \lambda\bar{a}$,
то $\bar{b}(\lambda a_1, \lambda a_2)$.
Значит,
$|\bar{b}| = \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2)} = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$.

$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Используя доказанное утверждение, найдите $|\bar{c}|$, если

1. $\bar{c} = 2\bar{a}_1$, $\bar{a}_1(0,3)$.
2. $\bar{c} = \frac{1}{2}a_2$, $\bar{a}_2(-5,0)$.
3. $\bar{c} = -9\bar{a}_3$, $\bar{a}_3(-6,8)$.

Объясните *доказательство второго утверждения* **теоремы.**



Используя доказанное утверждение, установите, одинаково или противоположно направлены векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$, если: 1. $\bar{x} = -2{,}5y$;

2. $\bar{x} = 0{,}3y$;

3. $\bar{x} = -7y$.

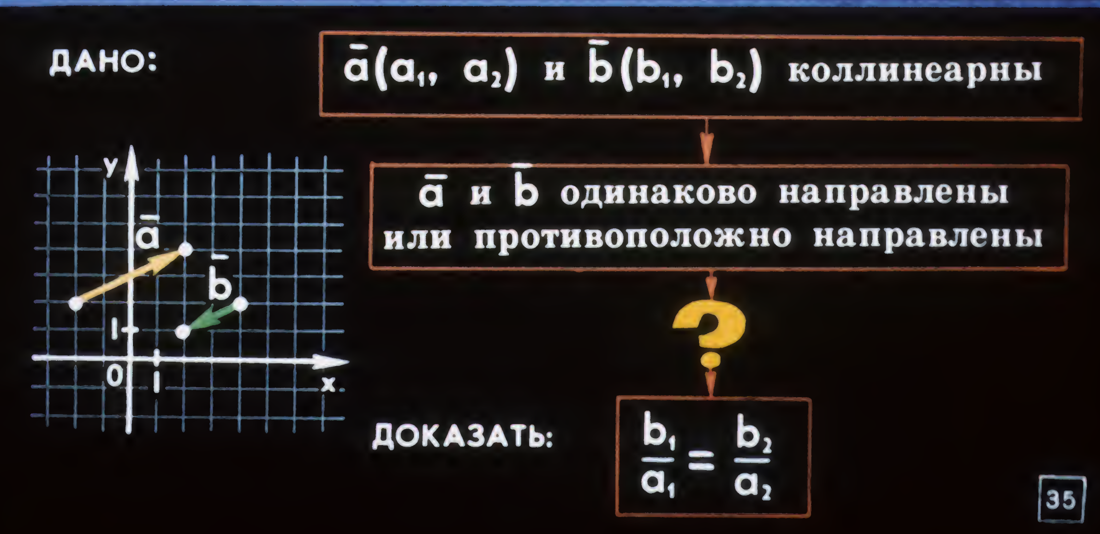
$\bar{a} \neq \bar{0}$ и $\bar{b} \neq \bar{0}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.



Какие из данных векторов коллинеарны $\bar{c}$?

Теорема. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Объясните начало доказательства первого утверждения теоремы и закончите его.



Проверьте свое доказательство.

ДАНО: $\bar{a}(a_1, a_2)$ и $\bar{b}(b_1, b_2)$ коллинеарны

$\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены или противоположно направлены

Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены, пусть $\bar{c} = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$; иначе пусть $\bar{c} = -\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$

$\bar{a} = \bar{c}$

$a_1 = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} b_1, \; a_2 = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} b_2$

или

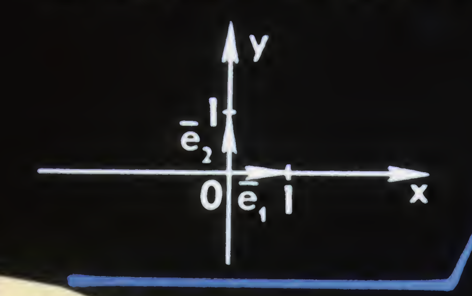
$a_1 = -\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} b_1, \; a_2 = -\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} b_2$

ДОКАЗАТЬ: $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$

Докажите обратное утверждение, обозначив отношение координат через λ и показав, что $\bar{b} = \lambda\bar{a}$.

Если $|\bar{a}|=1$, то вектор $\bar{a}$ называется *единичным*. Найдите координаты единичного вектора, одинаково направленного с вектором $\overline{(1,1)}$.

$\bar{e}_1(1,0)$ и $\bar{e}_2(0,1)$ — координатные векторы (орты).



Докажите, что для любого $\bar{a}(a_1, a_2)$

$$\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2.$$

$a_1\bar{e}_1=\overline{(a_1,0)}$,

$a_2\bar{e}_2=\overline{(0,a_2)}$.

▲

$A = f_1 s_1 + f_2 s_2$ — работа



Скалярным произведением векторов $\bar{a}(a_1, a_2)$ и $\bar{b}(b_1, b_2)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2$:

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Найдите скалярные произведения:

$\overline{OA} \cdot \overline{OB}$; $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$;

$\overline{OA} \cdot \overline{OE}$; $\overline{OB} \cdot \overline{OC}$;

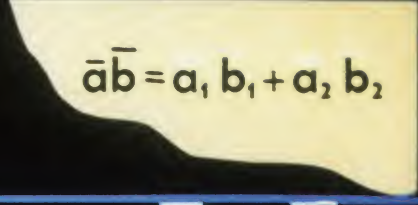
$\overline{OB} \cdot \overline{OD}$; $\overline{OD} \cdot \overline{OF}$.

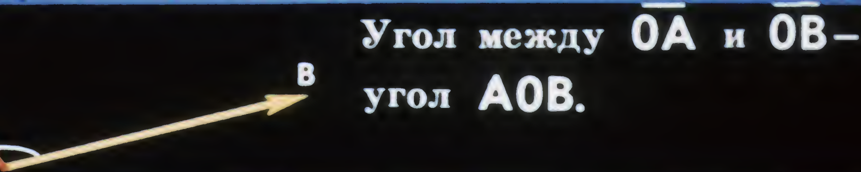
$\overline{OC} \cdot \overline{OF}$;

y
B (0,5)
C (−2,4)
A (4,2)
1
D (−2,0)
0
1
x
E (−4, −2)
F (1, −3)

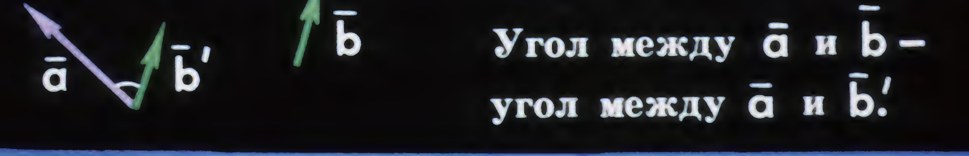
Объясните, почему:

1. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$;
2. $(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.





Угол между $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ – угол AOB.



Угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}'$.

$\bar{m}$

$\bar{n}$

Угол между $\bar{m}$ и $\bar{n}$ равен нулю.

Теорема. $\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

ДАНО: φ – угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$

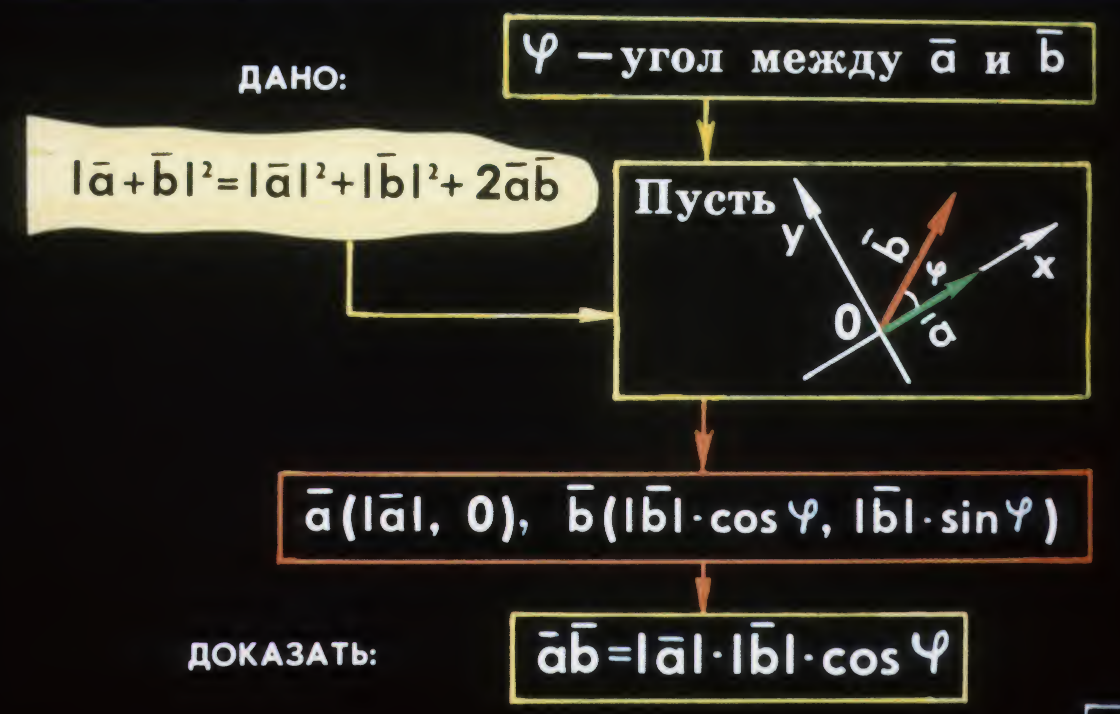
$|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\bar{b}$

Пусть

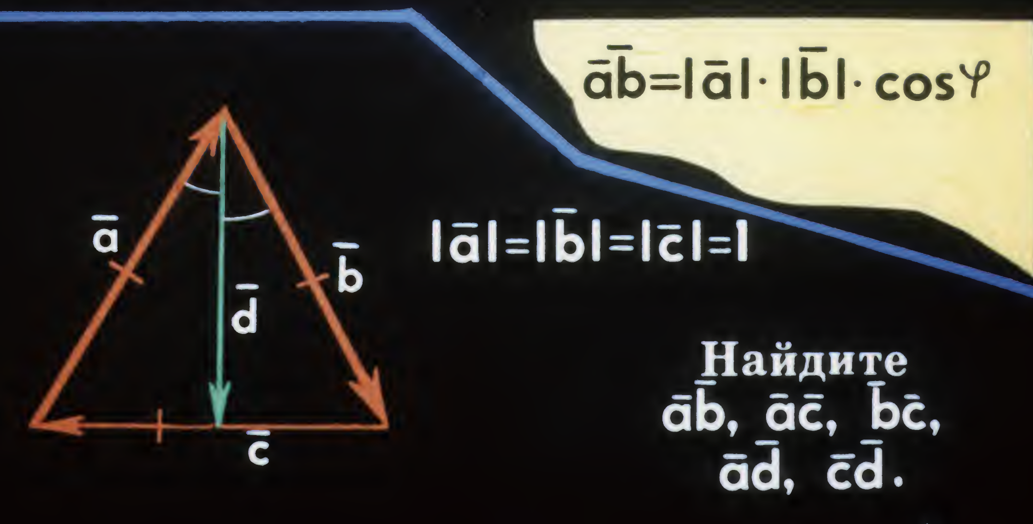
?

ДОКАЗАТЬ: $\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$

Объясните, почему можно взять данную систему координат, и закончите доказательство.


Проверьте свое доказательство.
ДАНО:
φ — угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$
$|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\bar{b}$
Пусть
y
x
0
$\bar{b}$
φ
$\bar{a}$
$\bar{a}(|\bar{a}|, 0)$, $\bar{b}(|\bar{b}|\cdot\cos\varphi, |\bar{b}|\cdot\sin\varphi)$
ДОКАЗАТЬ:
$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$
41

Докажите, что если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И обратно, если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.



РГДБ
2015

К сведению учителя

Диафильм предназначен для объяснения нового материала по учебнику А. В. Погорелова «Геометрия 6–10»: кадры 1–10–Параллельный перенос и его свойства, кадр 11–Понятие вектора, кадры 12–18–Абсолютная величина и направление вектора, кадры 19–23–Координаты вектора, кадры 24–29–Сложение векторов, кадры 30–37–Умножение вектора на число, кадры 38–42–Скалярное произведение векторов. Каждый кадр содержит задания для учащихся, полезные в ходе объяснения. В кадрах 4–5, 13, 16, 18, 26–29, 32–33 чертежи служат материалом для проведения доказательств данных утверждений. Для того же предназначены врезки с формулами.

КОНЕЦ

Диафильм сделан по программе,
утвержденной Министерством просвещения СССР

Автор *Е. Арутюнян*

Художник-оформитель *Н. Дунаева*

Редактор *Т. Разумова*

103062, Москва, Старосадский пер., 7

Цветной

Д-247-84